

Les identités remarquables :

Les identités remarquables sont des relations de synonymie (d'égalité) entre deux expressions.
Elles servent notamment : - à effectuer plus rapidement des transformations algébriques et
- à connaître d'autres manières de factoriser.

1. Les identités remarquables de type $(a + b)^n$ (avec n naturel) :

$$\begin{aligned}(a + b)^0 &= 1a^0 b^0 && = 1 \\(a + b)^1 &= 1a^1 b^0 + 1a^0 b^1 && = a + b \\(a + b)^2 &= 1a^2 b^0 + 2a^1 b^1 + 1a^0 b^2 && = a^2 + 2ab + b^2 \\(a + b)^3 &= 1a^3 b^0 + 3a^2 b^1 + 3a^1 b^2 + 1a^0 b^3 && = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\(a + b)^4 &= 1a^4 b^0 + 4a^3 b^1 + 6a^2 b^2 + 4a^1 b^3 + 1a^0 b^4 && = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

Nous pouvons observer trois caractéristiques pour nous permettre de reproduire ces identités :

- les exposants de a et de b ,
- le signe de chaque monôme et
- la valeur absolue de la partie numérique de chaque monôme.

1.1. Les exposants de a et de b :

Le nombre de monômes égale $n + 1$.

L'exposant de a va de n à 0 en diminuant de 1 d'un monôme au suivant.

L'exposant de b va de 0 à n en augmentant de 1 d'un monôme au suivant.

Par conséquent, la somme des exposants de a et de b reste constante, égale à n .

1.2. Le signe de chaque monôme :

Étant donné que ces identités remarquables sont des puissances appliquées à des sommes de monômes positifs, chaque monôme de l'addition développée est positif.

1.3. La partie numérique de chaque monôme :

La valeur absolue de la partie numérique de chaque monôme peut s'obtenir de plusieurs manières. La plus simple est la construction du triangle de Pascal.

Le triangle de Pascal est un triangle qui part de sa pointe et qui descend infiniment vers le bas. Chaque étage du triangle contient un nombre de plus que l'étage qui lui est directement supérieur. L'étage le plus élevé comporte un seul nombre, lequel égale 1 .

La valeur de chaque élément du triangle de Pascal égale la somme des deux nombres qui le surplombent directement. Chacun des éléments sis aux bords latéraux du triangle égale 1 .

				1					
				1	1				
			1	2	1				
		1	3	3	1				
	1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1				

2. Les identités remarquables de type $(a - b)^n$ (avec n naturel) :

$$\begin{aligned}(a - b)^0 &= 1a^0 b^0 && = 1 \\(a - b)^1 &= 1a^1 b^0 - 1a^0 b^1 && = a - b \\(a - b)^2 &= 1a^2 b^0 - 2a^1 b^1 + 1a^0 b^2 && = a^2 - 2ab + b^2 \\(a - b)^3 &= 1a^3 b^0 - 3a^2 b^1 + 3a^1 b^2 - 1a^0 b^3 && = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\(a - b)^4 &= 1a^4 b^0 - 4a^3 b^1 + 6a^2 b^2 - 4a^1 b^3 + 1a^0 b^4 && = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

Les caractéristiques sont les mêmes que pour les identités remarquables de type $(a + b)^n$, à la différence que les signes des monômes s'alternent, en commençant par le positif.

1. Développe les produits suivants :

0. $(a + 2b)^3 = a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$

1. $(x + y)^2 =$ _____

2. $(m - n)^2 =$ _____

3. $(2a + c)^2 =$ _____

4. $(p - 3s)^2 =$ _____

5. $(2g + 3h)^2 =$ _____

6. $(4b - 5d)^2 =$ _____

7. $(h + k)^3 =$ _____

8. $(2d - 3f)^3 =$ _____

9. $(a^2 + b^2)^2 =$ _____

10. $(2m^3 - 5n^2)^3 =$ _____

11. $(3n^4 + 2n^3)^4 =$ _____

12. $(5a/2 + 7b/3)^2 =$ _____

13. $(2a/3 - 5a/2)^4 =$ _____

14. $(a^{-2} - b^{-3})^5 =$ _____

15. $(2x + 3y)^6 =$ _____

16. $(x + 1)^7 =$ _____

17. $(1 - a^2)^8 =$ _____

18. $(a - 1/a)^4 =$ _____

19. $(2ab^2 - 3bd^3/2)^4 =$ _____

20. $(5m^{-1}n^{-2} + mn/2)^3 =$ _____

2. Factorise les expressions suivantes :

- | | | | |
|-----|---|---|--------------|
| 0. | $x^2 + 4xy + 4y^2$ | = | $(x + 2y)^2$ |
| 1. | $m^2 + 2mn + n^2$ | = | _____ |
| 2. | $a^2 - 4ab + 4b^2$ | = | _____ |
| 3. | $9g^2 + 12gh + 4h^2$ | = | _____ |
| 4. | $f^4 + 2f^5 + f^6$ | = | _____ |
| 5. | $t^2 - 2t + 1$ | = | _____ |
| 6. | $u^2 + 6u + 9$ | = | _____ |
| 7. | $v^2 + vx + x^2/4$ | = | _____ |
| 8. | $4s^2/9 + 16st/15 + 16t^2/25$ | = | _____ |
| 9. | $g^{-2} + 2g^{-1}h^{-2} + h^{-4}$ | = | _____ |
| 10. | $x^4 - 2 + x^{-4}$ | = | _____ |
| 11. | $-m^2 + 2mn - n^2$ | = | _____ |
| 12. | $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ | = | _____ |
| 13. | $f^3 - 6f^2g + 12fg^2 - 8g^3$ | = | _____ |
| 14. | $t^3 - 3t^2 + 3t - 1$ | = | _____ |
| 15. | $16t^4 + 96t^3 + 216t^2f^2 + 216tf^3 + 81f^4$ | = | _____ |
| 16. | $h^9 - 3h^{11} + 3h^{13} - h^{15}$ | = | _____ |
| 17. | $125t^3 + 150t + 60t^{-1} + 8t^{-3}$ | = | _____ |
| 18. | $81f^4 - 36f^3g + 6f^2g^2 - 4fg^3/9 + g^4/81$ | = | _____ |
| 19. | $x^3/8 - 3x/2 + 6/x - 8/x^3$ | = | _____ |
| 20. | $-16/x^4 + 16/x^2 - 6 + x^2 - x^4/16$ | = | _____ |

3. Complète les identités remarquables :

0. $m^2 + 2mn$ + n^2
1. $s^2 + 2st$ _____
2. $g^2 + 4gh$ _____
3. $4m^2 + 4mn$ _____
4. $m^3 + 3m^2n$ _____
5. $d^3 + 3d^2$ _____
6. $f^3 + 9f^2g^2$ _____
7. $27s^3 + 27s^2$ _____
8. $j^4 + 8j^3k$ _____
9. $j^4 + j^3$ _____
10. $a^6 + 6a^4$ _____
11. $a^2b^4 + 2ab^2c$ _____
12. $a^2b^4 + 2ab$ _____
13. $a^2/4 + ab$ _____
14. $a^2/9 + 9a$ _____
15. $z^3/8 + 3az^2/4$ _____
16. $y^3/8 + 3y^2/2$ _____
17. $m^{-2} + 2m^{-1}$ _____
18. $m^{-3} - 3m^{-2}n^7$ _____
19. $m^{-4}n^{-6} - 4m^3n^{-4}$ _____
20. $a^{2s} + 2a^{st-8}$ _____

1. Développe les produits suivants :

0. $(a + 2b)^3 = a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$
1. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
2. $(m - n)^2 = m^2 - 2mn + n^2$
3. $(2a + c)^2 = 4a^2 + 4ac + c^2$
4. $(p - 3s)^2 = p^2 - 6ps + 9s^2$
5. $(2g + 3h)^2 = 4g^2 + 12gh + 9h^2$
6. $(4b - 5d)^2 = 16b^2 - 40bd + 25d^2$
7. $(h + k)^3 = h^3 + 3h^2k + 3hk^2 + k^3$
8. $(2d - 3f)^3 = 8d^3 - 36d^2f + 27df^2 - 27f^3$
9. $(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$
10. $(2m^3 - 5n^2)^3 = 8m^9 - 60m^6n^2 + 150m^3n^4 - 125n^6$
11. $(3n^4 + 2n^3)^4 = 81n^{16} + 216n^{15} + 216n^{14} + 96n^{13} + 16n^{12}$
12. $(5a/2 + 7b/3)^2 = 25a^2/4 + 35ab/3 + 49b^2/9$
13. $(2a/3 - 5a/2)^4 = 16a^4/81 - 80a^4/27 + 50a^4/3 - 125a^4/3 + 625a^4/16$
14. $(a^{-2} - b^{-3})^5 = a^{-10} - 5a^{-8}b^{-3} + 10a^{-6}b^{-6} - 10a^{-4}b^{-9} + 5a^{-2}b^{-12} - b^{-15}$
15. $(2x + 3y)^6 = 64x^6 + 576x^5y + 2160x^4y^2 + 4320x^3y^3 + 4860x^2y^4 + 2916xy^5 + 729y^6$
16. $(x + 1)^7 = x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1$
17. $(1 - a^2)^8 = 1 - 8a^2 + 28a^4 - 56a^6 + 70a^8 - 56a^{10} + 28a^{12} - 8a^{14} + a^{16}$
18. $(a - 1/a)^4 = a^4 - 4a^2 + 6 - 4/a^2 + 1/a^4$
19. $(2ab^2 - 3bd^3/2)^4 = 16a^4b^8 - 48a^3b^7d^3 + 54a^2b^6d^6 - 27ab^5d^9 + 81b^4d^{12}/16$
20. $(5m^{-1}n^{-2} + mn/2)^3 = 125m^{-3}n^{-6} + 75m^{-1}n^{-3}/2 + 15m/4 + m^3n^3/8$

2. Factorise les expressions suivantes :

0.	$x^2 + 4xy + 4y^2$	=	$(x + 2y)^2$	
1.	$m^2 + 2mn + n^2$	=	$(m + n)^2$	
2.	$a^2 - 4ab + 4b^2$	=	$(a - 2b)^2$	
3.	$9g^2 + 12gh + 4h^2$	=	$(3g + 2h)^2$	
4.	$f^4 + 2f^3 + f^2$	=	$f^2(1 + 2f + f^2)$	= $f^2(f + 1)^2$
5.	$t^2 - 2t + 1$	=	$(t - 1)^2$	
6.	$u^2 + 6u + 9$	=	$(u + 3)^2$	
7.	$v^2 + vx + x^2/4$	=	$(v + x/2)^2$	
8.	$4s^2/9 + 16st/15 + 16t^2/25$	=	$(2s/3 + 4t/5)^2$	
9.	$g^{-2} + 2g^{-1}h^{-2} + h^{-4}$	=	$(g^{-1} + h^{-2})^2$	
10.	$x^4 - 2 + x^{-4}$	=	$(x^2 - x^{-2})^2$	
11.	$-m^2 + 2mn - n^2$	=	$-(m^2 - 2mn + n^2)$	= $-(m - n)^2$
12.	$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$	=	$(x + y)^3$	
13.	$f^3 - 6f^2g + 12fg^2 - 8g^3$	=	$(f - 2g)^3$	
14.	$t^3 - 3t^2 + 3t - 1$	=	$(t - 1)^3$	
15.	$16t^4 + 96t^3f + 216t^2f^2 + 216tf^3 + 81f^4$	=	$(2t + 3f)^4$	
16.	$h^9 - 3h^{11} + 3h^{13} - h^{15}$	=	$h^9(1 - 3h^2 + 3h^4 - h^6)$	= $h^9(1 - h^2)^3$
17.	$125t^3 + 150t + 60t^{-1} + 8t^{-3}$	=	$(5t + 2t^{-1})^3$	
18.	$81f^4 - 36f^3g + 6f^2g^2 - 4fg^3/9 + g^4/81$	=	$(3f - g/3)^4$	
19.	$x^3/8 - 3x/2 + 6/x - 8/x^3$	=	$(x/2 - 2/x)^3$	
20.	$-16/x^4 + 16/x^2 - 6 + x^2 - x^4/16$	=	$-(16/x^4 - 16/x^2 + 6 - x^2 + x^4/16)$	
		=	$-(2/x - x/2)^4$	

3. Complète les identités remarquables :

0.	$m^2 + 2mn$	$+ n^2$	=	$(m + n)^2$
1.	$s^2 + 2st$	$+ t^2$	=	$(s + t)^2$
2.	$g^2 + 4gh$	$+ 4h^2$	=	$(g + 2h)^2$
3.	$4m^2 + 4mn$	$+ n^2$	=	$(2m + n)^2$
4.	$m^3 + 3m^2n$	$+ 3mn^2 + n^3$	=	$(m + n)^3$
5.	$d^3 + 3d^2$	$+ 3d + 1$	=	$(d + 1)^3$
6.	$f^3 + 9f^2g^2$	$+ 27fg^4 + 27g^6$	=	$(f + 3g^2)^3$
7.	$27s^3 + 27s^2$	$+ 9s + 1$	=	$(3s + 1)^3$
8.	$j^4 + 8j^3k$	$+ 24j^2k^2 + 32jk^3 + 16k^4$	=	$(j + 2k)^4$
9.	$j^4 + j^3$	$+ 3j^2/8 + j/16 + 1/256$	=	$(j + 1/4)^4$
10.	$a^6 + 6a^4$	$+ 12a^2 + 8$	=	$(a^2 + 2)^3$
11.	$a^2b^4 + 2ab^2c$	$+ c^2$	=	$(ab^2 + c)^2$
12.	$a^2b^4 + 2ab$	$+ 1/b^2$	=	$(ab^2 + 1/b)^2$
13.	$a^2/4 + ab$	$+ b^2$	=	$(a/2 + b)^2$
14.	$a^2/9 + 9a$	$+ 729/4$	=	$(a/3 + 27/2)^2$
15.	$z^3/8 + 3az^2/4$	$+ 3a^2z/2 + a^3$	=	$(z/2 + a)^3$
16.	$y^3/8 + 3y^2/2$	$+ 6y + 8$	=	$(y/2 + 2)^3$
17.	$m^{-2} + 2m^{-1}$	$+ 1$	=	$(m^{-1} + 1)^2$
18.	$m^{-3} - 3m^{-2}n^7$	$+ 3m^{-1}n^{14} - n^{21}$	=	$(m^{-1} - n^7)^3$
19.	$m^{-4}n^{-6} - 4m^3n^{-4}$	$+ 4m^{10}n^{-2}$	=	$(m^{-2}n^{-3} - 2m^5n^{-1})^2$
20.	$a^{2s} + 2a^{st-8}$	$+ t^{-16}$	=	$(a^s + t^{-8})^2$

3. Les identités remarquables de type $a^n - b^n$ (avec n naturel non nul) :

$$\begin{aligned} a^1 - b^1 &= (a - b)(a^0 b^0) && = a - b \\ a^2 - b^2 &= (a - b)(a^1 b^0 + a^0 b^1) && = (a - b)(a + b) \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 b^0 + a^1 b^1 + a^0 b^2) && = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^4 - b^4 &= (a - b)(a^3 b^0 + a^2 b^1 + a^1 b^2 + a^0 b^3) && = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) \\ a^5 - b^5 &= (a - b)(a^4 b^0 + a^3 b^1 + a^2 b^2 + a^1 b^3 + a^0 b^4) && = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) \end{aligned}$$

Nous pouvons observer les caractéristiques suivantes de l'expression factorisée :

Elle est composée de deux facteurs.

Le premier facteur est constamment égale à $a - b$.

Le deuxième facteur est un polynôme qui possède n monôme(s).

Nous pouvons observer trois caractéristiques pour nous permettre de reproduire ce polynôme :

- les exposants de a et de b ,
- le signe de chaque monôme et
- la valeur absolue de la partie numérique de chaque monôme.

3.1. Les exposants de a et de b :

L'exposant de a va de n à 0 en diminuant de 1 d'un monôme au suivant.

L'exposant de b va de 0 à n en augmentant de 1 d'un monôme au suivant.

Par conséquent, la somme des exposants de a et de b reste constante, égale à n .

3.2. Le signe de chaque monôme :

Le signe de chaque monôme est positif étant donné que, dans l'autre facteur, il y a un monôme positif et un monôme négatif pour annuler les monômes intermédiaires obtenus si nous effectuons le produit.

Exemple : $(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

*	a^3	a^2b	ab^2	b^3
a	a^4	a^3b	a^2b^2	ab^3
$-b$	$-a^3b$	$-a^2b^2$	$-ab^3$	$-b^4$

Les monômes intermédiaires, soulignés, s'annulent deux par deux, si bien que ne subsistent que les deux monômes non soulignés.

3.3. La partie numérique de chaque monôme :

La partie numérique de chaque monôme égale 1 .

4. Les identités remarquables de type $a^n + b^n$ (avec n naturel non nul) :

$$\begin{aligned} a^1 + b^1 &= (a + b)(a^0 b^0) && = a + b \\ a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 b^0 - a^1 b^1 + a^0 b^2) && = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^5 + b^5 &= (a + b)(a^4 b^0 - a^3 b^1 + a^2 b^2 - a^1 b^3 + a^0 b^4) && = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \end{aligned}$$

Ces identités remarquables ont les mêmes caractéristiques que celles du type $a^n - b^n$, à ceci près que :

- la première parenthèse est une somme, et non une différence,
- les monômes de la deuxième parenthèse voient leurs signes s'alterner, en commençant par le positif,
- en raison de cette alternance de signes, ces identités remarquables ne sont valables que si n est naturel et impair.

4. Factorise les expressions suivantes :

0. $m^2 - n^2$ = $(m - n)(m + n)$
1. $c^3 - d^3$ = _____
2. $f^4 - e^4$ = _____
3. $g^5 - e^5$ = _____
4. $a^2 - 1$ = _____
5. $b^2 - 4$ = _____
6. $64 - c^2$ = _____
7. $64 - c^3$ = _____
8. $a^2 - b^4$ = _____
9. $a^3 - b^6$ = _____
10. $a^{10} - b^5$ = _____
11. $m^{12} - n^9$ = _____
12. $s^{10} - t^8$ = _____
13. $g^3 + h^3$ = _____
14. $x^5 + y^5$ = _____
15. $9a^2 - 16b^6$ = _____
16. $64a^6 - 125b^9$ = _____
17. $b^6 - 1$ = _____
18. $g^4 - 1$ = _____
19. $j^9 - 1$ = _____
20. $j^9 + 1$ = _____

4. Factorise les expressions suivantes :

0. $m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$
1. $c^3 - d^3 = (c - d)(c^2 + 2cd + d^2)$
2. $f^4 - e^4 = (f - e)(f^3 + f^2e + fe^2 + e^3) = (f - e)(f^2(f + e) + e^2(f + e)) = (f - e)(f + e)(f^2 + e^2)$
3. $g^5 - e^5 = (g - e)(g^4 + g^3e + g^2e^2 + ge^3 + e^4)$
4. $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$
5. $b^2 - 4 = (b - 2)(b + 2)$
6. $64 - c^2 = (8 - c)(8 + c)$
7. $64 - c^3 = (4 - c)(16 + 4c + c^2)$
8. $a^2 - b^4 = (a - b^2)(a + b^2)$
9. $a^3 - b^6 = (a - b^2)(a^2 + ab^2 + b^4)$
10. $a^{10} - b^5 = (a^2 - b)(a^8 + a^6b + a^4b^2 + a^2b^3 + b^4)$
11. $m^{12} - n^9 = (m^4 - n^3)(m^8 + m^4n^3 + n^6)$
12. $s^{10} - t^8 = (s^5 - t^4)(s^5 + t^4)$
13. $g^3 + h^3 = (g + h)(g^2 - gh + h^2)$
14. $x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$
15. $9a^2 - 16b^6 = (3a - 4b^3)(3a + 4b^3)$
16. $64a^6 - 125b^9 = (4a^2 - 5b^3)(16a^4 + 20a^2b^3 + 25b^6)$
17. $b^6 - 1 = (b^3 - 1)(b^3 + 1) = (b - 1)(b^2 + b + 1)(b + 1)(b^2 - b + 1)$
18. $g^4 - 1 = (g^2 - 1)(g^2 + 1) = (g - 1)(g + 1)(g^2 + 1)$
19. $j^9 - 1 = (j^3 - 1)(j^6 + j^3 + 1)$
20. $j^9 + 1 = (j^3 + 1)(j^6 - j^3 + 1)$